EQUAÇÕES DIOFANTINAS LINEARES NO ENSINO MÉDIO: UM TEMA MOBILIZADOR DE ESTRATÉGIAS ARITMÉTICAS & ALGÉBRICAS

Wagner Marcelo Pommer[1]
Clarice Peres Carvalho Retroz Pommer[2]

Resumo

Este texto apresenta os resultados de um estudo qualitativo que objetivou investigar se, como e em que medida alunos do ensino básico mobilizam estratégias aritméticas e algébricas em situações-problema tematizadas nas Equações Diofantinas Lineares. Nossas referências teóricas envolvem Campbell e Zazkis (2002), Ferrari (2002) e Rezende (2007), que consideram a Teoria Elementar dos Números como um importante contexto organizador de estratégias aritméticas e algébricas. Em particular, tivemos como hipótese que as Equações Diofantinas Lineares possibilitam o reinvestimento de conceitos básicos da Teoria Elementar dos Números em consonância com o aprimoramento de estratégias algébricas. Como referência metodológica nos inserimos na linha da Didática da Matemática, nos inspirando na Engenharia Didática, relatada em Artigue (1996), para elaborar e aplicar uma seqüência de atividades a um grupo de alunos do Ensino Médio de uma escola pública da cidade de São Paulo. As manifestações verbais e os protocolos de pesquisa revelaram uma mobilização inicial espontânea de estratégias aritméticas, que evoluíram para o uso de estratégias algébricas, viabilizando contribuições para o ramo da Educação Algébrica.

Palavras-chave: Equações Diofantinas Lineares, Engenharia Didática, Estratégias, Teoria Elementar dos Números.

Abstract

This paper reports the qualitative research results and aimed to investigate if, how and in what extension basic education students can mobilize arithmetic and algebraic strategies in problem situations contextualized on Diophantine Linear Equation theme. Our theoretical references guides are Campbell and Zazkis (2002), Ferrari (2002) and Rezende (2007) that consider Elementary Number Theory as an important and propitious context to organize arithmetical and algebraic strategies. In particular, we have by hypothesis that Linear Diophantine Equations theme can available reinvestment of Elementary Number Theory concepts in consonance with algebraic strategies improvement. We consider Didactics of Mathematics science as our methodological reference, inspired in Didactical Engineering, designed by Artigue (1996), to elaborate and to apply a sequence of activities to a High School student group on a public school in the city of Sao Paulo. The oral manifestations and the research protocol revealed an initial and spontaneous arithmetic strategies mobilization, which evaluated to algebraic strategies, which may constitute a contribution to Algebraic Education field.

[1] Doutorando em Educação pela Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo (FEUSP). Contato: wmpommer@usp.br

[2] Mestre em Psicologia pela Universidade São Marcos (UNIMARCO). Contato: claricepommer@usp.br

Key words: Linear Diophantine Equation; Didactical Engineer; Strategies, Elementary Number Theory.

Introdução

Apesar de grande empenho e mobilização por parte da comunidade de pesquisadores, professores e instituições educacionais, o ensino da Álgebra ainda se constitui em campo aberto para contribuições frente às dificuldades dos alunos do ensino básico, no que se refere à compreensão dos aspectos semânticos e quanto ao uso da Álgebra como ferramenta para o encaminhamento das soluções frente a situações-problema.

O ensino de Álgebra representa um fator de entraves que pode configurar um quadro "[...] de exclusão social, uma vez que, os que não conseguem aprendê-la, vêem formar-se diante de si barreiras intransponíveis para a ascensão do conhecimento (CASTRO, 2005, p. 2).

Dentre as várias pesquisas que propõem um quadro esclarecedor para situar e enfrentar as dificuldades dos alunos com o uso da linguagem algébrica destacamos o trabalho de Fiorentini, Miorim e Miguel (1993). Estes autores propõem um repensar na Educação Algébrica pela necessária valorização do desenvolvimento do pensamento algébrico, um elemento fundamental do campo matemático que pode ser expresso em várias formas, seja pelo uso da linguagem natural, da linguagem aritmética ou da linguagem algébrica. Os referidos autores enfatizam que as mútuas conexões que surgem pelo uso das diversas formas de expressão potencializam o pensamento algébrico, o que pode favorecer aos estudantes uma maior compreensão do papel otimizador da ferramenta algébrica para a busca de soluções em diversos problemas matemáticos e extra matemáticos.

Para o encaminhamento da referida problemática, apontamos inicialmente neste texto as motivações e os pressupostos das escolhas que nortearam a investigação de mestrado desenvolvida no Grupo de Pesquisa em Educação Algébrica (GPEA). O GPEA desenvolve pesquisas de cunho documental, diagnóstico e interventivo em torno do projeto 'O que se entende por álgebra?'. Uma das linhas do referido projeto fomenta pesquisas que considerem a importante articulação presente entre a Teoria Elementar dos Números e a Álgebra, campos que são subjacentes a quase todos os domínios da Matemática, conforme destacam Maranhão, Machado e Coelho (2005).

Ao estimular produções acadêmicas que potencializam a articulação de temas da Teoria Elementar dos Números e a Álgebra, presentes no currículo do ensino básico, o GPEA abriu espaço para uma série de propostas que possibilitam o manejo de conceitos de forma integrada. Uma parte da produção acadêmica do grupo visa promover:

> [...] a sensibilização sobre a contribuição dos estudos sobre o tema no desenvolvimento do fazer matemático como demonstrar, conjecturar e diversificar estratégias para resolução de problemas que envolvam números inteiros. (MARANHÃO; MACHADO; COELHO, 2007, p. 4).

Nos moldes delineados, inicialmente direcionamos a pesquisa para a busca de temas que promovessem uma articulação da Teoria Elementar dos Números e a Álgebra. Dentro dessa perspectiva, relembramos algumas relações constituídas no decorrer do ofício de professor. Em uma ocasião, no Ensino Fundamental II, em uma instituição que elaborava o próprio material didático, no livro do atual 8º ano, na introdução do capítulo dedicado as equações de 1º grau, havia uma série de situações-problema com variado número de soluções inteiras, não-vazias, envolvendo contextos acessíveis a alunos desta faixa etária.

Os problemas a que nos referimos representavam implicitamente Equações Diofantinas Lineares do tipo ax + by = c, com coeficientes *a*, *b*, *c* inteiros e soluções inteiras, assunto usualmente abordado em cursos de graduação em Matemática. Destacamos que o manual do professor somente indicava uma abordagem através da estratégia da tentativa e erro, incentivando a exposição dos resultados na forma de uma tabela, sem outras considerações que permitissem explorar o potencial algébrico inerente às situações.

Em outra circunstância, ao lecionar Fundamentos de Matemática em cursos de bacharelado em Ciências Sociais, havia recomendação para a contextualização da disciplina com os temas característicos desta área. Durante a revisão bibliográfica, encontramos inúmeras situações e ilustrações de conceitos básicos presentes na área de Microeconomia que estão em interface com o ensino da Matemática. Mais especificamente, emergiram alguns exemplos que representavam soluções inteiras, implicitamente relacionadas as Equações Diofantinas Lineares. Vale ressaltar que algumas dessas situações referem-se a questões cujo contexto consideramos próximos à realidade do cidadão comum.

Diante destas prerrogativas, nos propusemos a encaminhar uma pesquisa a alunos do Ensino Médio, com enfoque na resolução de situações-problema envolvendo números inteiros, que implicitamente representavam Equações Diofantinas Lineares.

Os referenciais teóricos

A partir de uma revisão de literatura presente em autores como Rocque e Pitombeira (1991), Zerhusen, Rakes e Meece (1999), Campbell e Zazkis (2002), Ferrari (2002), Universidade de Minho (2003), Schin (2005), Wielewski (2005) e Groenwald et al. (2006), ponderei as razões e em que medida as Equações Diofantinas Lineares com duas ou três incógnitas, tema usualmente tratado somente em cursos de Teoria dos Números, no Ensino Superior, mas que poderia ser aproveitado em sala de aula no ciclo básico.

Naturalmente, '*não'* estamos a defender a inclusão formal das Equações Diofantinas Lineares no currículo como mais um objeto de estudo. A utilização de situações-problema envolvendo Equações Diofantinas Lineares no ensino de Matemática Elementar básico tem pertinência quando vinculada à valorização e importância de se desenvolver questões envolvendo os números inteiros.

Inicialmente, a fim de estabelecer o lugar das Equações Diofantinas Lineares no Ensino de Matemática do ciclo básico, autores como Brolezzi (1996), Jurkiewicz (2004) e Veloso et al. (2005) destacam que o trabalho com números inteiros é pouco valorizado no Ensino Médio.

Em particular, Machado (2008 apud Pommer, 2008) observa que existem questões interessantes e simples envolvendo números inteiros, mas não abordadas no Ensino Médio, pois geralmente são resolvidas no conjunto dos números reais e ajusta(m)-se a(s) solução(ões) particular(es) para os números inteiros. Deste modo, a pertinência de

Cadernos da Pedagogia. São Carlos, Ano 6 v. 6 n. 12, p. 166-184, jan-jun 2013
ISSN: 1982-4440

problemas envolvendo Equações Diofantinas Lineares no ensino de Matemática do ciclo básico fica vinculada à valorização e importância de questões envolvendo números inteiros.

Jurkiewicz (2004) revela que um aspecto crucial para entender o atual desequilíbrio em favor do contínuo no currículo atual de Matemática da escola básica, se deve ao papel histórico desencadeado pelo surgimento do cálculo diferencial e integral.

> A seqüência números naturais; números inteiros; números racionais; números reais [...] aponta de forma decisiva para uma matemática do contínuo. [...] O programa é claro, explícito e bem sucedido. Nunca é demais reforçar que esse sucesso é merecido. A quantidade e a qualidade dos resultados de matemática do contínuo possibilitou ao mundo ser o que é hoje. Essa matemática soube responder, com louvor, aos desafios pela ciência dos séculos XIX e XX. (JURKIEWICZ, 2004, p. 2-3).

Neste ponto, outra contribuição ao tema desta pesquisa se faz presente em Rezende (2007). A autora delimitou os assuntos básicos a serem tratados num curso inicial de Teoria Elementar dos Números, no âmbito dos números inteiros, incluindo como tema as Equações Diofantinas Lineares, dentre outros.

A descrição de Resende (2007) está embasada nas considerações de Campbell e Zazkis (2002) e também em Ferrari (2002), que caracterizam a Teoria dos Números não só como o estudo dos tópicos básicos e usuais como, por exemplo, números inteiros, múltiplos, divisores e máximo divisor comum, que pertencem ao currículo de Matemática do Ensino Básico, como também acrescidos de tópicos algébricos. Os referidos autores acrescentam que a resolução de problemas situando os tópicos da Teoria dos Números não envolve necessariamente a aplicação direta de algoritmos, o que favorece o desenvolvimento de habilidades como interpretar, conjecturar e incentiva a busca de heurísticas e estratégias, de modo a propiciar a formação de sentido para o aluno.

Rezende (2007) ressalta que o fato da Teoria dos Números terem elementos de interseção com a Álgebra e a Aritmética tem trazido algumas interpretações indevidas, com implicações no ensino e na aprendizagem de Matemática. Segundo a autora, tal ocorrência tem relação com a concepção vigente em tratar os inteiros simplesmente como subconjuntos dos números reais, podendo conduzir a simplificações que desprezam aspectos fundamentais dos números inteiros.

Rezende (2007) ainda destaca que a interface com a Álgebra tem justificado a pouca ênfase dada à Teoria dos Números nos currículos dos diferentes níveis de ensino. Em particular, "[...] na escola básica, alguns temas de Teoria Elementar dos Números, por uma falta de compreensão mais ampla, vão sendo esvaziados nos currículos, por não ter uma aplicação imediata" (REZENDE, 2007, p. 73).

Outra contribuição a esta pesquisa se encontra em Amerom (2003). Este autora, ao investigar meios didáticos que capacitassem o estudante de escola básica a realizar uma transição propícia da Aritmética para a Álgebra, aplicou uma sequência didática a duas classes de alunos na faixa de 10 a 12 anos. A autora percebeu que os alunos, fazendo uso das estratégias próprias, utilizam o equacionamento para estruturar o problema, realizando os cálculos aritméticos a partir dos coeficientes da equação. Amerom (2003) concluiu que a utilização de situações que permitem aflorar estratégias informais dos próprios alunos facilita a transição para o aluno construir métodos algébricos.

Cadernos da Pedagogia. São Carlos, Ano 6 v. 6 n. 12, p. 166-184, jan-jun 2013
ISSN: 1982-4440

Em face desses pressupostos, estabelecemos como objetivo da investigação verificar se, como e em que medida alunos do ensino básico podem articular estratégias aritméticas e algébricas para aprimorar conhecimentos envolvendo as Equações Diofantinas Lineares.

O referencial metodológico

Para esta investigação qualitativa[3] utilizamos como metodologia os recursos da Engenharia Didática, descrita em Artigue (1996). Segundo esta autora, a Engenharia Didática surgiu no bojo das questões levantadas pela *Didática da Matemática Francesa*[4], com a intenção de facilitar os estudos sobre as relações entre a investigação e a ação no sistema de ensino.

Almouloud (2007) indica como objetivo primordial da Didática da Matemática a caracterização de um processo de aprendizagem por meio de uma série de situações reprodutíveis, denominadas de situações didáticas, que estabelecem os fatores determinantes para a evolução do comportamento dos alunos. Assim, "[...] o objeto central de estudo nessa teoria não é o sujeito cognitivo, mas a situação didática, na qual são identificadas as interações entre professor, aluno e saber" (ALMOULOUD, 2007, p. 32).

Essa metodologia foi criada por inspiração do trabalho didático comparável à realização de um projeto pelo engenheiro, que se apoia e aceita o controle científico, mas também está ciente da maior complexidade dos problemas didáticos. A Engenharia Didática possui uma "[...] dupla função, a qual pode ser compreendida tanto como um produto resultante de uma análise, caso da metodologia de pesquisa, quanto como uma produção para o ensino" (MACHADO, 2002, p. 198).

A Engenharia Didática é composta de quatro fases. É importante salientar que as quatro fases não ocorrem, geralmente, de forma linear e estanque. A elaboração da Engenharia Didática necessita, em alguns momentos, da articulação, da antecipação e até da superposição dos elementos caracterizadores destas quatro fases, descritas a seguir.

A primeira fase, das Análises Preliminares, leva em consideração o quadro teórico didático geral e os conhecimentos didáticos já adquiridos envolvendo o campo de domínio a ser estudado, assim como:

> a- a análise epistemológica dos conteúdos visados pelo ensino;
> b- a análise do ensino habitual e dos seus efeitos;
> c- a análise das concepções dos alunos, das dificuldades e obstáculos que marcam a sua evolução. (ARTIGUE, 1996, p. 198).

[3] Lüdke e André (1986) concebem a pesquisa qualitativa contendo uma coleta de dados descritivos, obtidos diretamente na fonte, através no contato do pesquisador com a situação, preocupando-se mais com o processo do que com o produto, de modo a retratar as perspectivas dos participantes.

[4] De acordo com Gálvez (1996), a proposta da Didática da Matemática surgiu a partir da década de 60 na França, ambientada em reformas educativas levadas a cabo pelo IREM (Institutos de Investigação acerca do Ensino das Matemáticas). Em seus primórdios, o IREM desenvolvia uma complementação na formação de professores de matemática e na produção de meios materiais de apoio para a sala de aula, tais como textos, jogos, brinquedos, problemas, exercícios e experimentos de ensino. A análise da validade das ações desenvolvidas favoreceu a evolução para estudos do ensino da matemática que permitiram a produção de conhecimento para controlar e produzir ações sobre o ensino.

Com fundamento em Machado (2002), a primeira fase desta pesquisa envolveu a possibilidade e importância do reinvestimento dos conceitos dos múltiplos, divisores e máximo divisor comum no ensino básico, assim como na revisão bibliográfica envolvendo as dificuldades na compreensão e percepção por alunos do Ensino Médio da especificidade de problemas algébricos que envolvem a solução com números inteiros.

Na segunda fase, da Concepção e Análise a Priori, Artigue (1996) pondera que é essencial haver uma fina análise prévia das concepções dos alunos, das dificuldades e dos erros tenazes. A autora afirma que um dos pontos essenciais desta segunda fase reside na suposição de que a Engenharia Didática é concebida para provocar, de forma controlada, a evolução das concepções dos alunos. Para isso, a análise *a priori* deverá prever os comportamentos:

> [...] e mostrar no que a análise efetuada permitirá controlar o sentido desses comportamentos. Além disso, deve-se assegurar que, se tais comportamentos ocorrerem, resultarão no desenvolvimento do conhecimento visado pela aprendizagem. (MACHADO, 2002, p. 207).

Neste ponto, salientamos que tais considerações estão de acordo com a situação de ação descrita em Brousseau (1996a,b), onde o aluno reflete e simula tentativas, elegendo um procedimento de resolução, dentro de um esquema de adaptação, através da interação com o 'milieu'[5], tomando as decisões que faltam para organizar a resolução do problema.

Nas situações de formulação, conforme Brousseau (1996a,b), ocorre troca de informação entre o aluno e o 'milieu', através da utilização de uma linguagem mais adequada, sem a obrigatoriedade do uso explícito de linguagem matemática formal, podendo ocorrer ambiguidade, redundância, uso de metáforas, criação de termos semiológicos novos, falta de pertinência e de eficácia na mensagem, dentro de retroações contínuas. Assim, nas situações de formulação, os alunos procuram modificar a linguagem que utilizam habitualmente, adequando-a as informações que devem comunicar.

Inserida na metodologia de Engenharia Didática e vista como paradigma metodológico bem definido, a Teoria das Situações Didáticas de Brousseau (1996a), contribuiu para esta pesquisa na medida em que permitiu prever as condições para que pudesse ocorrer a efetivação da aprendizagem pelos alunos. Nesse sentido, para fazer funcionar um conhecimento, numa situação de aprendizagem:

> [...] é necessário que a resposta inicial que o aluno pensa frente à pergunta formulada não seja a que desejamos ensinar-lhe; se fosse necessário possuir o conhecimento a ser ensinado para poder responder, não se trataria de uma situação de aprendizagem. A 'resposta inicial' só deve permitir ao aluno utilizar uma estratégia de base com a ajuda de seus conhecimentos anteriores; porém, muito rapidamente, esta estratégia deveria se mostrar suficientemente ineficaz para que o aluno se veja obrigado a realizar acomodações – quer dizer, modificações de seu

[5] O termo 'milieu' indica o meio que pode abranger situações-problema, jogos, conhecimentos prévios do aluno e os dos colegas. Brousseau (1996a) coloca que o 'milieu' representa uma intenção didática não-explícita do professor, que possibilita a interação autônoma do aluno em relação às situações que interage e em relação ao professor. Para este autor, o 'milieu' deve ser organizado para a aprendizagem numa interação feita de assimilações e acomodações, permitindo ao aluno a reflexão sobre suas ações e retroações, impondo restrições através de regras que devem ser respeitadas. Assim, "o aluno aprende adaptando-se a um meio que é um fator de contradições, de dificuldades, de desequilíbrios [...] Este saber, fruto da adaptação do aluno, manifesta-se através de respostas novas, que são a prova da aprendizagem" (BROUSSEAU, 1996a, p. 49).

Cadernos da Pedagogia. São Carlos, Ano 6 v. 6 n. 12, p. 166-184, jan-jun 2013
ISSN: 1982-4440

> sistema de conhecimentos – para responder à situação proposta. (BROUSSEAU, 1996b, p. 49).

Vale ressaltar que na segunda fase devem ser identificadas as variáveis didáticas que, segundo Gálvez (1996), são aquelas para as quais as escolhas de valores provocam modificações nas estratégias de resolução de problemas. Dentre as variáveis didáticas situam-se as variáveis macrodidáticas ou globais, relativas à organização global da engenharia. Nesta pesquisa, as variáveis macrodidáticas envolveram aspectos da teoria das Situações Didáticas de Brousseau (1996), a organização dos alunos na pesquisa em agrupamentos, a utilização de jogos como recurso didático, a escolha de situações-problema contextualizadas em quantias monetárias e a delimitação das soluções no conjunto dos números inteiros.

A terceira fase, da Experimentação, consiste na própria aplicação da Engenharia Didática, concebida a um grupo de alunos, objetivando verificar as ponderações levantadas na análise *a priori*. Assim, a experimentação pressupõe:

> - a explicitação dos objetivos e condições de realização da pesquisa a população de alunos que participará da experimentação;
> - o estabelecimento do contrato didático[6];
> - a aplicação do instrumento de pesquisa;
> - o registro das observações feitas durante a experimentação.
>
> (MACHADO, 2002, p. 206).

Segundo Brousseau (1996a), no contrato didático é essencial a consciência da não-interferência explícita de conhecimentos, propiciando assim condições que permitam a mobilização do aluno em enfrentar o problema e em resolvê-lo, pelo menos em parte, através da lógica interna e dos conhecimentos anteriores. Assim, o entendimento mútuo dos papéis - da não-intervenção do pesquisador e da ação independente do aluno - e o respeito a estas condições, garantem condições para se caracterizar o contrato didático nesta pesquisa.

A etapa de experimentação desta pesquisa consistiu no desenvolvimento de ações, concretizadas pela aplicação de uma sequência didática prevista para três sessões de 60 minutos, em horário extra-aula, aos sábados. O pesquisador foi até uma escola pública da cidade de São Paulo (que não era professor), em uma comunidade de parcos recursos, solicitando permissão ao Diretor da Instituição para a efetivação do experimento. Em outro momento, o pesquisador fez o convite nas salas de aula, aos alunos de Ensino Médio, no período noturno. O convite foi aceito por dez alunos, que foram formalmente aceitos mediante a permissão assinada pelos pais ou responsáveis.

Na etapa de experimentação, foram comunicados os objetivos aos sujeitos de pesquisa e aplicados instrumentos de pesquisa, cabendo ao pesquisador o registro dos comportamentos dessa população, através da observação e transcrição das gravações sonoras, assim como na produção escrita em relação às atividades realizadas, que permitiram a análise e a obtenção de protocolos para a possível comprovação das hipóteses levantadas.

---

[6] Segundo Chevallard, Bosch e Gascón (2001), o contrato didático é um conjunto de normas ou cláusulas, geralmente implícitas, que regulam as obrigações recíprocas do professor e dos alunos, em relação ao projeto de estudo de ambas as partes, que evolui a medida que o processo didático avança.

A quarta fase, da Análise a Posteriori e Validação, consistiu no tratamento dos dados, tendo sido realizada através da confrontação com a Análise a Priori, da 2ª fase, permitindo a interpretação dos resultados e verificando em que condições as questões levantadas foram respondidas, permitindo a generalização local com validação interna da situação.

A sequência didática: apresentação e análise de dados.

Nas três sessões foram propostas atividades inseridas em alguns pressupostos da teoria das Situações Didáticas de Brousseau (1996), embasadas em jogos e resolução de situações-problema, num contexto envolvendo quantidades monetárias. Estes recursos visaram favorecer a devolução[7], o reconhecimento e a necessária ação independente para o encaminhamento das tentativas de resolução para a busca de soluções inteiras e, principalmente, possibilitar a criação de diferentes estratégias de resolução por parte dos alunos. Os alunos formaram duplas ou trios e interagiram com a proposta veiculada, tendo o pesquisador um papel de observador, mediador e o da institucionalização.

As atividades desenvolvidas nas três sessões objetivaram propiciar situações com variado número de soluções inteiras e com nenhuma solução, através de problemas que possibilitam provocar outras formas de estratégia além da tentativa e erro, assim como no desenvolvimento da escrita algébrica como facilitadora para a busca de soluções.

As atividades propostas na 1ª sessão constaram de um jogo inicial e duas situações-problema que cobriram as diferentes possibilidades: existência de variado número finito de soluções inteiras e nenhuma solução. Ao deixar que o aluno experimentasse estratégias, pretendíamos que ele percebesse a insuficiência da tentativa e erro em problemas onde ocorre a inexistência de solução, assim como na possível dificuldade em resolver algumas situações que envolvem um elevado número de soluções inteiras.

Assim, as atividades favoreceram ao aluno reconhecer situações que representam implicitamente as Equações Diofantinas Lineares, vivenciando a natureza discreta, ou seja, das soluções inteiras e o variado número de soluções, que dependiam de fatores que o aluno não controlava.

Apresentamos inicialmente o 'jogo do sorvete' (quadro 01). Foi entregue uma folha contendo as regras, sendo previsto cinco minutos para a leitura. A seguir, cada dupla recebeu uma folha para registro dos dois resultados a serem sorteados e quatro cartas.

Quadro 01: As regras do 'Jogo do sorvete' [Fonte: Pommer (2008, p. 60)].

Jogo nº 1: Convidamos vocês a participar do 'jogo do sorvete'. Regras:
• O jogo transcorre em quatro rodadas de, no máximo, 2 minutos cada.
• O jogo será disputado entre duas duplas da mesma série.
• Cada dupla registra seus resultados na folha entregue para tal.
• Cada quadra de alunos, das duas duplas, recebe quatro cartas fechadas com os seguintes valores: R$8,00; R$10,00; R$12,00; R$14,00.
• Cada carta corresponde ao valor que deve ser gasto em sorvetes.
• São duas opções de sorvetes de casquinha: bola simples a R$ 2,00 e bola

7 A devolução, de acordo com Brousseau (1996a) significa o aceite do aluno em enfrentar o desafio intelectual de resolver as situações propostas, como se o problema fosse dele.

Cadernos da Pedagogia. São Carlos, Ano 6 v. 6 n. 12, p. 166-184, jan-jun 2013
ISSN: 1982-4440

dupla a R$ 4,00.

- Existem muitos sabores disponíveis para os pedidos.
- Inicia o jogo a dupla que ganhar na disputa par ou ímpar.
- A dupla vencedora retira a carta de cima e a mostra para todos.
- A dupla oponente registra o valor da carta e todas as possibilidades de compra de sorvetes de casquinha, sem as revelar à dupla adversária.
- O jogo continua até o término das cartas, invertendo em cada rodada os papéis das duplas.
- Completando-se as quatro rodadas, cada dupla mostra todos os resultados obtidos à dupla adversária, que deverá conferi-los.

Na 1ª sessão, compareceram sete dos dez alunos (três da 1ª série e quatro da 3ª série do Ensino Médio). Houve uma reorganização, compondo-se as duplas D_1 e D_2, com as alunas da 3ª série, uma dupla D_3 e um aluno U_3, alunos da 1ª série. Após as quatro rodadas, cada grupo mostrou os resultados ao adversário, disponíveis nos quadros 02 e 03.

Quadro 02: Resultados do jogo relativo ao grupo G_1 (alunos da 3ª série do Ensino Médio)

Grupo G_1	Dupla D_1		Dupla D_2	
	Gasto R$ 8,00	Gasto R$ 12,00	Gasto R$ 10,00	Gasto R$ 14,00
Soluções corretas	4 b.s. 2 b.d.	6 b.s. 3 b.d.	5 b.s. 1 b.s. e 2 b.d.	todas (4)
Soluções faltantes	1	2	1	0
	2 b.s. e 1 b.d.	2 b.s. e 2 b.d. 4 b.s. e 1 b.d.	3 b.s. e 1 b.d.	0

Quadro 03: Resultados do jogo relativo ao grupo G_2 (alunos da 1ª série do Ensino Médio)

Grupo G_2	**D_3**		**U_3**	
	Gasto R$ 12,00	Gasto R$ 14,00	Gasto R$ 8,00	Gasto R$ 10,00
Soluções corretas	1	1	1	1
	2 b.s. e 2 b.d.	3 b.s. e 2 b.d.	*1 b.d. + 1 b.d.*	1 b.s. e 2 b.d.
Soluções faltantes	3	3	2	2
	6 b.s. 3 b.d. 4 b.s. e 1 b.d.	7 b.s. 5 b.s. e 1 b.d. 1 b.s. e 3 b.d.	4 b.s. 2 b.s. e 1 b.d.	5 b.s. 3 b.s. e 1 b.d.

A escolha dos valores monetários possibilitou rápida mobilização para a busca das soluções inteiras representadas pelas diversas escolhas de sorvetes de casquinha. Todos os grupos compreenderam corretamente o enunciado e o caráter discreto das quantidades inteiras representadas pelas bolas de sorvete. Porém, houve distinção nas produções dos grupos quanto à existência de mais de uma solução e a determinação das quantidades.

Conforme pode ser observado no quadro 02, a dupla D_2 formada por alunos da 3ª série foi a única que representou corretamente todas as soluções inteiras para o gasto de R$ 14,00, assim como determinou duas das três soluções para o gasto de R$ 10,00. Os alunos da dupla D_1 não conseguiram determinar todas as soluções, representando somente aquelas que envolviam somente a compra de um tipo de sorvete, revelando uma possível interpretação do 'ou' exclusivo, que foi posteriormente confirmado ao serem interpelados no início da 2ª sessão.

Por último, os alunos do grupo G_2, composto por alunos da 1ª série, apresentaram somente uma solução no início da atividade (quadro 03). Esse tipo de reação dos elementos desse grupo pode ser reflexo do contrato didático, onde os alunos acreditam que existe somente uma solução para problemas matemáticos. Porém, posteriormente perceberam que haveria mais de uma solução em um segundo momento, ao responder o quesito *resultados faltantes* (quadro 04).

Quadro 04: Respostas dos alunos na etapa da verificação dos resultados do jogo.

Grupo/Dupla		Perceberam resultados faltantes?	Para qual gasto?	Resultados faltantes
G_1	D_1 analisa D_2	Não	-	-
	D_2 analisa D_1	Sim	R$ 12,00	2 b.s. e 2 b.d. 4 b.s. e 1 b.d.
G_2	D_3 analisa U_3	Sim	R$ 8,00 e R$ 10,00	Com bolas duplas
	U_3 analisa D_3	Sim	R$ 12,00 e R$ 14,00	Com bolas simples

De modo geral, os alunos dos grupos G_1 e G_2 perceberam a natureza discreta ao encaminhar as soluções inteiras, assim como utilizaram o método da tentativa e erro como estratégia preferencial, conforme previsto, tendo atingido o objetivo proposto neste jogo.

No desenvolvimento da 1ª sessão, foi apresentada aos alunos uma situação-problema denominada 'Quantos pacotes de café?', cujo enunciado é:

> Uma loja de conveniência trabalha com diversas marcas de café. Num determinado mês, um comprador desta loja comprou 2 tipos de café – tipo A (normal) e tipo B (descafeinado). Sabendo-se que ele gastou exatamente R$ 58,00, quais são as diversas maneiras que ele pode adquirir os pacotes do tipo A e do tipo B? O preço do pacote da marca A é R$ 2,00 e do pacote da marca B, R$ 3,00. (POMMER, 2008, p. 61).

Esta situação-problema propiciou um desafio maior na medida em que exigiu maior organização e percepção para a busca das nove soluções inteiras. Em particular, a dupla D_1 acertou todas as soluções do problema 1, partindo da tentativa e erro e rapidamente organizaram as respostas após algumas poucas tentativas, o que mostrou indícios de uma evolução na estratégia. A dupla D_2 encontrou três das nove possibilidades de aquisição de café do tipo A ou B. Porém, o grupo G_2 (os três alunos da 1ª série) não interpretou corretamente o problema e forneceu uma resposta inadequada, assim como não percebeu a existência de mais de uma solução. Os resultados estão expressos no quadro 05.

Quadro 05: Resultados esperadas e obtidas na atividade 2 pelo grupo G_2 e pelas duplas D_1 e D_2.

Respostas esperadas	02 - A 18 - B	05 - A 16 - B	08 – A 14 - B	11 - A 12 - B	14 - A 10 - B	17 - A 08 - B	20 - A 06 - B	23 - A 04 - B	26 - A 02 - B
D_1	(2,18)	(5,16)	(8,14)	(11,12)	(14,10)	(17,8)	(20,6)	(23,4)	(26,2)
D_2	(2,18)	(5,16)	-	-	(14,10)	-	-	-	-
G_2 (D_3+ U_3)	-	-	-	-	-	-	-	-	-

No fechamento da 1ª sessão, foi apresentada uma segunda situação-problema, denominada 'Qual sua escolha: CD ou DVD?', cujo enunciado é:

> Uma aluna, Bianca, fã de música, reserva num certo mês R$ 60,00 para a compra de CDs ou DVDs. Um CD custa R$ 10,00 e um DVD R$ 15,00. (a) Quais são as várias possibilidades de aquisição destes dois bens, gastando-se exatamente R$ 60,00? (POMMER, 2008, p. 63).

Nesta primeira parte, optou-se por viabilizar uma relação entre as variáveis didáticas representadas pelo valor a ser gasto e os valores unitários de CD e DVD. A intenção foi de permitir um rápido acesso pela estratégia de tentativa e erro, de modo a verificar se os alunos conseguiam interpretar corretamente o enunciado do problema e encontrar as três soluções, fato que se confirmou em dois dos três grupos (G_2 e D_2). A dupla D_1 novamente apresentou somente uma solução (quadro 06).

Quadro 06: Síntese das respostas dos alunos para o gasto de R$ 60,00.

Gasto (R$ 60,00)	D_1	D_2	G_2 (D_3+ U_3)
Soluções	3 CDs + 2 DVDs	3 CDs + 2 DVDs 6 CDs 4 DVDs	3 CDs + 2 DVDs 6 CDs 4 DVDs
Soluções faltantes	6 CDs 4 DVDs	0	0

Numa continuidade da situação-problema 'Qual sua escolha: CD ou DVD?', foi apresentado aos alunos o seguinte desdobramento:

> (b) Passados 2 meses, Bianca resolveu fazer novas aquisições, porém notou que os preços de CD e DVD aumentaram para R$ 12,00 e R$ 16,00, respectivamente. Para compensar estes aumentos, Bianca pensou em gastar exatamente R$ 70,00 para as compras musicais. Como ficariam as possibilidades de compra destes dois bens gastando-se exatamente R$ 70,00? (POMMER, 2008, p. 63).

O objetivo foi apresentar ao aluno uma situação-problema com nenhuma solução. Isto foi viabilizado através da mudança do valor da variável didática representada pelo gasto para a compra de CDs ou DVDs, que visou ambientação para que o aluno percebesse a limitação do método da tentativa e erro como estratégia de resolução, de modo a permitir ao aluno vivenciar esta característica das Equações Diofantinas Lineares.

Conforme previmos, os três grupos dispuseram de maior tempo na tentativa de busca das soluções. Os sujeitos de pesquisa questionaram se havia ou não solução inteira, devido à insistência na utilização do método da tentativa e erro, porém não formularam nenhuma conjectura em relação à inexistência de solução. Nenhum grupo respondeu de modo satisfatório, o que pode ser verificado no quadro 07.

Quadro 07: Síntese das respostas dos alunos para o gasto de R$ 70,00.

Gasto R$ 70,00	Respostas
D_1	2 DVDs + 3 CDs = 68,00; o valor não será exato
D_2	Não encontramos possibilidades
G_2	5 CDs

Sintetizando as considerações em relação à 1ª sessão, os grupos G_1 e G_2 vivenciaram algumas características das Equações Diofantinas Lineares ao descobrirem que algumas das situações-problema apresentadas possuem variado número de solução inteira. Considerando-se os três grupos, estes perceberam que as grandezas envolvidas representam números inteiros (discretas), indicadas pelas quantidades de produtos ou serviços a serem adquiridos, porém ainda estavam vinculados ao método da tentativa e erro como estratégia inicial e preferencial. Houve indícios de percepção pelos alunos da limitação da estratégia aritmética de tentativa e erro, no caso em que não souberam explicitar se existia ou não solução, propiciado pela vivencia de uma insatisfação. Sintetizamos no quadro 08 estas considerações em relação à 1ª sessão.

Quadro 08: Síntese das conclusões em relação à 1ª sessão.

1ª sessão	D_1	D_2	D_3	U_3
	G_1		G_2	
Perceberam a natureza discreta das grandezas?	SIM	SIM	SIM	SIM
Perceberam que havia mais de uma solução?	SIM	SIM	Em geral	Em geral
Utilizaram o método da tentativa e erro como estratégia preferencial?	SIM	SIM	SIM	SIM
Houve evolução de estratégia?	Em parte	não	não	não

Acreditamos que o jogo inicial e as duas situações-problema favoreceram a devolução, conforme Brousseau (1996), proporcionando uma motivação, uma interpretação inicial e a busca das soluções, confirmando o uso da estratégia da tentativa e erro como a preferida pela maioria dos sujeitos de pesquisa, algo previsto na Análise a Priori. Este fator é extremamente relevante e foi considerado para a elaboração das propostas nas sessões, de modo a possibilitar a superação deste quadro extremamente limitado da tentativa e erro.

Com relação às respostas apresentadas, estas se situaram no âmbito dos números inteiros, fornecendo indícios que os contextos utilizados contribuíram para o reconhecimento dos alunos acerca da natureza discreta das grandezas envolvidas na solução.

Deste modo geral, comparando-se o desempenho dos grupos, foi caracterizado que os grupos representados pelos alunos do 3º ano apresentaram maior capacidade na mobilização para obter as soluções inteiras, assim como na organização dos resultados.

A 2ª sessão objetivou desenvolver condições para provocar no aluno a percepção dos múltiplos ou divisores como estratégia facilitadora para a busca de soluções de uma Equação Diofantina Linear, o que permitiria aos alunos um avanço na complexa elaboração de um repertório de estratégias para a resolução de situações-problema.

Na 2ª sessão também foram utilizados jogos numa perspectiva de resolução de problemas, apresentados em três etapas. Tendo comparecido seis alunos a essa sessão, foram formados dois grupos de alunos: o grupo G_1, composto por três alunas da 3ª série e o grupo G_2, formado por dois alunos e uma aluna da 1ª série.

Apresentamos a seguir considerações sobre a etapa n. 2, denominada o 'Jogo dos Saques no caixa eletrônico':

> Usualmente, um caixa eletrônico de banco pode dispor de cédulas (notas) para atender eventuais solicitações de saques. Suponha que todos os caixas possuam suficientes cédulas para emissão.
>
> (a) Um usuário deseja fazer um saque e decide utilizar um caixa eletrônico que emite somente cédulas de R$ 5,00 ou R$ 10,00. Consulta o seu saldo e verifica que possui em sua conta, no momento, R$ 61,00. Indeciso, resolve efetuar um saque, mas não deseja zerar o saldo. Forneça todos os possíveis saques que poderiam ser realizados pelo usuário. Explique seu raciocínio. (POMMER, 2008, p. 83).

Esta etapa objetivou propiciar condições aos alunos em observar que os múltiplos representam uma estratégia mais favorável à busca das soluções. Nesta situação, a escolha dos valores das cédulas - R$ 5,00 e R$ 10,00 - representativos das variáveis didáticas, facilitariam esta percepção, pois a relação entre eles possibilitaria ao aluno perceber que os múltiplos inteiros positivos de R$ 5,00, até o valor de R$ 60,00, seriam a solução almejada.

Os dois grupos atingiram o objetivo, realizando inicialmente cálculos aritméticos através da estratégia da tentativa e erro. Porém, a seguir, ocorreu a operacionalização dos múltiplos como estratégia facilitadora, ao perceberam a relação dos possíveis saques e o fato de que todos eles são divisíveis de 5, conforme ilustrado no quadro 09.

Quadro 09: Protocolo representando as soluções dos grupos G_1 e G_2.

	Seqüência de valores de possíveis saques	Justificativa
Grupo G_1	(5, 20, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60)	Todos os números divisíveis por 5 até o 60.
Grupo G_2	(5, 20, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60)	Todos os números divisíveis por 5

A seguir, apresentamos a última parte da etapa n. 2, que almejou a utilização do conceito de múltiplo como estratégia adequada para a resolução da situação-problema pelos alunos. Isto pode ser veiculado pela utilização de um valor de saque com maior ordem de grandeza (R$ 1060,00), que inviabilizaria o uso do método da tentativa e erro.

> (d) Um cliente entra na agência com serviço de caixa eletrônico específico, indicado na tabela abaixo. Ele deseja fazer um saque de R$ 1060,00. Indique na 3ª coluna, escrevendo SIM ou NÂO, qual (is) o(s) caixa(s) eletrônico(s) do banco que permite(m) tal saque. Justifique (POMMER, 2008, p. 86).

Caixa eletrônico	Cédulas emitidas	Saque de R$ 1060,00
Caixa 1	5 e 10	
Caixa 2	10 e 20	
Caixa 3	20 e 50	
Caixa Especial	2 e 10	

Conforme previmos, se efetivou a estratégia mais provável, onde os dois grupos realizaram cálculos mentais e acertaram todas as respostas. O objetivo se concretizou pelo preenchimento da tabela, conforme o protocolo expresso no quadro 10.

Quadro 10: Protocolo representando a solução correta, expressa pelo grupo G_2.

Caixa eletrônico	Cédulas emitidas	Saque de R$ 1060,00
Caixa 1	5 e 10	Sim
Caixa 2	10 e 20	Sim
Caixa 3	20 e 50	Sim
Caixa Especial	2 e 10	Sim

Cadernos da Pedagogia. São Carlos, Ano 6 v. 6 n. 12, p. 166-184, jan-jun 2013
ISSN: 1982-4440

Porém, não houve menção explícita ao conceito de múltiplo ou divisor na justificativa. Os dois grupos retratam conceitos de forma equivocada, conforme se observa no protocolo indicativo do quadro 11.

Quadro 11: Protocolo representando as justificativas dos grupos G_1 e G_2, nesta ordem.

Justificativa: Todos. Sim pois todos os nºs são pares

Justificativa: Todos os números são inteiros menos o 2

Ressaltamos que os resultados indicados nos quadros desta 2ª sessão ilustram, de modo geral, as sínteses das produções dos dois grupos. Em nossa análise, entendemos que o grupo G_1 adquiriu alguns conhecimentos envolvendo as Equações Diofantinas Lineares, ao operacionalizar as soluções inteiras das situações-problema apresentadas, explicitando em algumas situações o papel dos múltiplos como estratégia facilitadora na busca de soluções inteiras e fornecendo indícios de percepção da relação entre as quantidades monetárias fornecidas como fator fundamental para a existência de solução. Quanto ao grupo G_2, este alcançou parcialmente os objetivos ao persistir na estratégia da tentativa e erro na busca de soluções, operacionalizando a descoberta das soluções e percebendo a natureza discreta das grandezas envolvidas.

Também, a utilização dos jogos como fonte de motivação parece ter favorecido a devolução das situações, proporcionando condições para a interpretação e busca das soluções inteiras. Também, as respostas favoráveis na grande maioria dos problemas mostraram indícios que os contextos utilizados contribuíram para a interpretação e busca de soluções inteiras. Destacamos, no quadro 12, as produções dos dois grupos na 2ª sessão.

Quadro 12: Síntese das produções da 2ª sessão, pelos grupos G_1 e G_2.

2ª sessão	Grupo G_1	Grupo G_2
Utilizaram as grandezas discretas?	SIM	SIM
Perceberam que havia mais de uma solução?	SIM	SIM
Utilizaram o método da tentativa e erro como estratégia preferencial?	Poucas vezes	Em geral
Houve evolução para qual estratégia?	Múltiplos	Múltiplos

Como não houve menção ou uso da ferramenta algébrica, na 3ª sessão nos propusemos retomar alguns dos problemas resolvidos nas sessões anteriores. A ideia era propiciar condições para que os alunos escrevessem as equações relativas a eles e a utilizassem como ferramenta otimizadora para a busca e organização das soluções inteiras.

Devido às dificuldades no uso da ferramenta algébrica, realizamos uma institucionalização antecedendo o início da 3ª sessão. Utilizamos como suporte para a discussão as próprias produções de problemas utilizados na pesquisa, na 1ª e 2ª sessões, questionando os alunos quanto às características dos dados e das soluções, organizando os resultados de modo a possibilitar elementos para a evolução da escrita algébrica a partir da estratégia da tentativa e erro e como esta ferramenta poderia facilitar a busca das soluções.

O quadro 13 indica a síntese da 3ª sessão, destacando as quantidade de soluções corretas e a equação descrita pelos dois grupos.

Quadro 13: Síntese dos resultados obtidos pelos grupos G_1 e G_2.

	Grupo G_1	**Grupo G_2**

Atividade	Soluções corretas	Equação	Soluções corretas	Equação
'Quantos pacotes de café?'	9 (todas)	$2x + 3y = 58$	1 (de 9)	$2x + 3y = 58$ $2.26+3.2=58$
'Saques no banco'	4 (todas)	$5x + 20y= 65$	4 (todas)	$5x + 20y= 65$
'CDs ou DVDs?'	Não há possibilidades	$12x + 16 y = 70$	não	$12x + 16 y = 70$

O grupo G_1 atingiu o objetivo nas três situações-problema apresentadas na 3ª sessão, conforme exemplificado no quadro 13. O referido grupo percebeu a importância e realizou a transferência do registro algébrico para a obtenção das soluções.

O grupo G_3 atingiu parcialmente o objetivo, pois teve dificuldade em distinguir a solução numérica a partir da escrita algébrica, assim como não percebeu algumas das soluções inteiras.

O quadro 14, ilustrado abaixo, sintetiza as observações em relação as manifestações dos alunos nas atividades da 3ª sessão.

Quadro 14: Síntese das manifestações dos grupos G_1 e G_2, na 3ª sessão.

Atividade	3ª sessão	**Grupo G_1**	**Grupo G_2**
1	Houve equacionamento?	SIM	Associado a solução particular
	Determinaram todas soluções?	SIM	não
2	Utilizaram o método da tentativa e erro como estratégia inicial?	SIM	SIM
	Houve equacionamento?	SIM	Associado a solução particular
	Perceberam que havia mais de uma solução inteira?	SIM	SIM
	Utilizaram a equação para determinar as soluções?	SIM	SIM
	Determinaram todas soluções?	SIM	SIM
	Explicitaram todas as soluções?	Verbalmente	Por escrito
3	Utilizaram o método da tentativa e erro como estratégia de partida?	SIM	não
	Houve equacionamento?	SIM	SIM
	Houve indícios da inexistência de solução inteira?	Os divisores dos dados dos enunciados	não

Considerações finais

Os resultados expressos pelos sujeitos de pesquisa indicaram que é possível a alunos do Ensino Médio manifestar conhecimentos envolvendo as Equações Diofantinas Lineares, sem necessariamente envolver a apresentação de algoritmos.

Foi observado que, espontaneamente, os sujeitos de pesquisa utilizaram preferencialmente a estratégia de tentativa e erro para a busca inicial das soluções. No decorrer das sessões, alguns estudantes desenvolveram outras estratégias como recurso para a resolução dos problemas, seja através do uso do conceito de múltiplo ou pela escrita algébrica. Ainda, alguns alunos organizaram as soluções e, a partir das respostas encontradas, perceberam o uso da escrita algébrica como otimizadora para a busca das possíveis soluções inteiras.

Em relação ao desempenho dos grupos de 1ª e 3ª séries do Ensino Médio, os alunos do 3º ano apresentaram maior capacidade na mobilização para obter as soluções inteiras, na organização dos resultados, na determinação da expressão algébrica que representa as situações-problema e na utilização desta forma de expressão para a busca de soluções. Apontamos uma possível razão considerando que estes alunos vivenciaram mais situações no ambiente escolar em temas que envolvem grandezas discretas, tais como as Sequências Numéricas, Progressões Aritméticas, Análise Combinatória e Sistemas Lineares, caracterizando uma maior maturidade frente ao desenvolvimento escolar.

Os alunos dessa pesquisa apresentaram dificuldade em perceber e estabelecer alguma estratégia quando uma situação não possui solução inteira, devido principalmente a limitação das estratégias utilizadas pelos alunos. Esta limitação natural pode servir de mote para uma etapa de institucionalização, de modo a que o professor explore a motivação propiciada pela ação e formulação dos alunos. Na pesquisa que realizamos, após a conclusão das três sessões, realizamos uma institucionalização final. Neste fechamento, destacamos os resultados favoráveis que eles atingiram e dinamizamos uma apresentação que indicou em que condições uma Equação Diofantina Linear não tem solução.

Diante de tais considerações, concluímos que é possível a alunos de Ensino Médio desenvolver conhecimentos envolvendo Equações Diofantinas Lineares, ao se deparar com uma situação didática embasada nos moldes de Brousseau (1996), viabilizando a estes alunos a ação independente para desenvolver estratégias facilitadoras que operacionalizem conceitos da teoria Elementar dos Números – os múltiplos ou os divisores - assim como o uso da escrita algébrica como ferramenta otimizadora para a busca das soluções inteiras, que entre em consonância com a proposta de Fiorentini, Miorim e Miguel (1993).

Pelas manifestações presentes na pesquisa, destacamos o grande envolvimento e empenho dos alunos nas atividades propostas, que acreditamos ter sido possibilitada pela utilização dos jogos numa perspectiva de resolução de problemas como fonte de motivação. Estes recursos didáticos favoreceram a devolução das situações propostas, inicialmente caracterizadas pelo intenso debate entre os alunos para o entendimento das regras dos jogos, que proporcionou condições iniciais para a superação das dificuldades encontradas inerentes à leitura e interpretação dos textos matemáticos propostos nesta pesquisa, assim como na efetivação da ação independente para a busca das soluções. Assim, houve mobilização para o entendimento das condições matemáticas presentes no texto matemático: os valores fornecidos, o que era solicitado, a existência de diversificado número de soluções e a natureza discreta das questões apresentadas.

Isto está de acordo com ponderações presentes em Borin (1995) e Pozo (1998), que destacam que o ato lúdico proporcionado pelo jogo facilita a interação, que associado às situações-problema representam recursos didáticos de mediação entre as possibilidades dos alunos e as exigências da tarefa. Estes recursos didáticos se revelaram de fundamental importância para favorecer o desenvolvimento de conhecimentos envolvendo as Equações Diofantinas Lineares.

Por último, acreditamos que as respostas favoráveis na grande maioria dos problemas mostraram indícios que a escolha de situações contextualizadas em questões econômicas, próximas ao cotidiano do aluno, contribuíram para a explicitação de diversas estratégias para a busca de soluções inteiras, no contexto das Equações Diofantinas Lineares.

Referências

ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da Didática da Matemática**. Paraná: UFPR, 2007.

AMEROM, B. A. Von. FOCUSING ON INFORMAL STRATEGIES WHEN LINKING ARITHMETIC TO EARLY ALGEBRA. *Educational Studies in Mathematics*. Holanda, v. 54, 2003, p. 63-75.

ARTIGUE, M. Engenharia Didática. In: BRUN, J. **Didática das Matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. Cap 4, p. 193 -217.

BORIN, J. **Jogos e Resolução de Problemas**: Uma Estratégia para as aulas de Matemática. São Paulo: CAEM, IME-USP, 1995, v.6.

BROLEZZI, A. C. **A Tensão entre o Discreto e Contínuo na História da Matemática e no Ensino da Matemática**. 1996. Tese (Doutorado). Faculdade de Educação da USP, São Paulo, 1996.

BROUSSEAU, G. Fundamentos e Métodos da Didáctica da Matemática. In: BRUN, Jean. **Didáctica das Matemáticas**. Tradução: Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, 1996a. Cap 1, p. 35 -113.

______. Os diferentes papéis do professor. In: PARRA, C.; SAIZ, I. **Didática da Matemática:** Reflexões Psicopedagógicas. Tradução de: Juan Acuña Llorens. Porto Alegre: ArtMed, 1996b. Cap. 4, p. 48-72.

CAMPBELL, S.; ZAZKIS, R. Toward Number Theory as a Conceptual Field. In: CAMPBELL, S.; ZAZKIS, R. (org.). **Learning and Teaching Number Theory**. London: Ablex Publishing, 2002, Cap 1, p. 1-14.

CASTRO, M. R. **Educação Algébrica e Resolução de Problemas**. Disponível em: <http://www. tvebrasil.com.br/salto>. Acesso em: 01 out. 2010.

CHEVALLARD, Y.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. **Estudar Matemáticas**: O elo perdido entre o ensino e a aprendizagem. Tradução de: Daisy Vaz de Moraes. Porto Alegre: ArtMed, 2001.

FERRARI, P. L. Understanding Elementary Number Theory at the Undergarduate Level: A Semiotic Approach. In: CAMPBELL, S.; ZAZKIS, R. (org.). **Learning and Teaching Number Theory.** London: Ablex Publishing, 2002. Cap. 5, p. 97-115.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A.; MIGUEL, A. Contribuição para um repensar … a Educação Algébrica Elementar. **Pro-Posições**. v. 4. n. 1. mar. 1993, p. 78-91.

GÁLVEZ, G. A Didática da Matemática. In: PARRA, C.; SAIZ, I. **Didática da Matemática***:* Reflexões Psicopedagógicas. Tradução de: Juan Acuña Llorens. Porto Alegre: ArtMed, 1996. Cap. 2. p. 26-35.

GROENWALD, C. L. O. et al. **Teoria dos Números e suas Aplicações no Processo de Ensino e Aprendizagem**. Disponível em <http://ccet.ucs.br/ eventos /outros/ egem/cientificos/cc79.pdf> Acesso em: 02 jul. 2006.

JURKIEWICZ, S. **Matemática Discreta e Ensino Médio**. Programa de Engenharia de Produção da UFRJ, 2004. Disponível em: <http://ensino.univates.br/ ~chaet/Materiais /matdiscreta_ medio.pdf>. Acesso em 18. mar. 2007.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em Educação**: Abordagens Qualitativas. São Paulo: Editora Pedagógica e Universitária, 1986.

MACHADO, S. D. A. Engenharia Didática. In: MACHADO, S. D. A. (org.). **Educação Matemática:** Uma introdução. 2. ed. São Paulo: Educ, 2002. p 197-208.

MARANHÃO, M. C. S.A.; MACHADO, S. D. A.; COELHO, S. P. PROJETO: **O que se entende por Álgebra?** São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2005.

POMMER, W. M. **Equações Diofantinas Lineares:** Um Desafio Motivador para Alunos do Ensino Médio. 2008. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

POZO, J. I. Introdução. In: POZO, J. I. (org). **A Solução de problemas:** Aprender a resolver, resolver para aprender. Porto Alegre: ArtMed, 1998. p. 9-11.

REZENDE, M. R. **Re-significando a Disciplina Teoria dos Números na Formação do Professor de Matemática na Licenciatura**. 2007. Tese de Doutorado do Programa de Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

ROCQUE, G. de La; PITOMBEIRA, J. B. Uma equação diofantina e suas resoluções. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, 1991. v. 19, p. 39-47.

SCHIN, E. **O Meu Aniversário**. UFMG. Disponível em: <http://www.reniza.com/ forums/ MalbaTahan/posts/52.html>. Acesso em: 15 jul. 2005.

VELOSO, E. et al. **A Matemática na formação inicial dos professores. Documento para discussão**. Associação de Professores de Matemática (APM) e Sociedade Portuguesa de Matemática (SPM), Portugal. out. 2005. Disponível em: <http://www.eduardoveloso.com/pdfs/matprof.pdf>. Acesso em 19. mar. 2007.

UNIVERSIDADE DE MINHO. **Equações Diofantinas**. Portugal, 2003. Cap. 2. Disponível em: <http://www.math.uminho.pt/.../outros/2003_Capitulo2>. Acesso em: 12 jul. 2006.

WIELEWSKI, G. D. **Aspectos do pensamento matemático na resolução de problemas:** Uma apresentação contextualizada da obra de Krutetskii. 2005. 407 p. Tese (Doutorado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.